Spinea – 18-20 giugno 2008

LA RETTA DEI NUMERI: STRUMENTO O PROBLEMA?

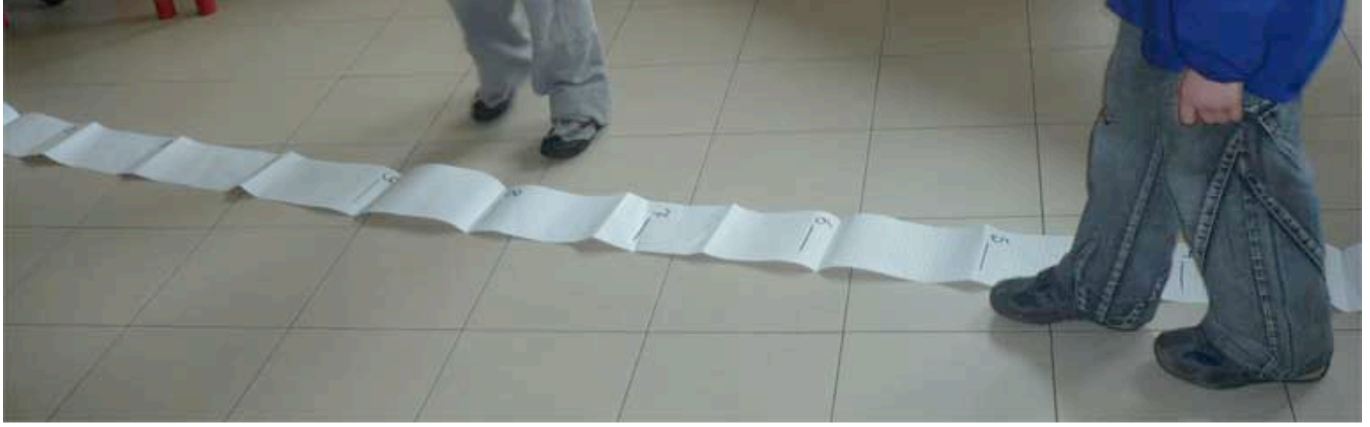
Donatella Merlo

La retta dei numeri è un oggetto matematico che viene introdotto molto presto nella scuola primaria per rappresentare l'ordine dei numeri naturali e per fornire un supporto nel calcolo di addizioni e sottrazioni con numeri entro il 20.
Viene anche esplicitamente richiamato nelle Nuove Indicazioni per il curriculum come **strumento** per rappresentare sia i numeri interi (positivi e negativi) sia i numeri decimali.

> *Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola primaria*
> Leggere e scrivere i numeri **naturali** in notazione decimale, con la consapevolezza del valore che le cifre hanno a seconda della loro posizione; confrontarli e ordinarli, anche rappresentandoli sulla retta.
> …….
> Leggere, scrivere, confrontare numeri **decimali**, rappresentarli sulla retta ed eseguire semplici addizioni e sottrazioni, anche con riferimento alle monete o ai risultati di semplici misure.
>
> *Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria*
> Rappresentare i numeri **conosciuti** sulla retta e utilizzare scale graduate in contesti significativi per le scienze e per la tecnica.
>
> *Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado*
> Interpretare i **numeri interi negativi** in contesti concreti.
> Rappresentare i numeri **conosciuti** sulla retta.

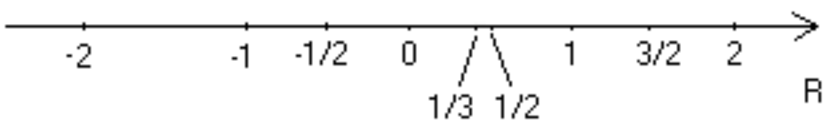
La linea dei numeri o la retta dei numeri?

Linea e retta in geometria non sono termini equivalenti ma linea dei numeri e retta dei numeri, didatticamente parlando, paiono essere la stessa cosa. Così non è, tant'è che nelle Nuove indicazioni si parla sempre di retta e mai di linea. Perché?
Chi usa il termine "linea dei numeri" ha di solito in mente una linea, non necessariamente retta e a volte nemmeno con i numeri alla stessa distanza, su cui sta scritta la sequenza ordinata dei numeri naturali quindi uno strumento che dovrebbe supportare la conta riducendo il carico cognitivo richiesto dal richiamare alla mente senza sbagliare la sequenza dei numeri.
Questa ad esempio è una "linea dei numeri" per contare facendo passi o salti:

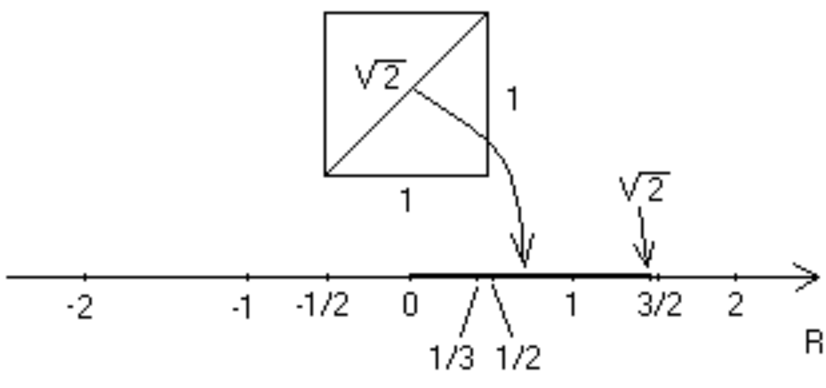


Non entro nel merito del discorso, ma mi sembra alquanto poco probabile che sia di supporto nel conteggio e nel calcolo se prima non vengono risolti alcuni problemi correlati alla sua struttura: ad es. dove comincia e dove finisce un numero, che cosa c'è tra un numero e l'altro, si contano le tacche o gli spazi ecc. che sono domande che potrebbero nascere da qualsiasi alunno un po' sveglio e attento a quel che succede. Quindi a mio parere può diventare un problema … ed è bene che lo diventi come vedremo più avanti…
Chi usa il termine "retta dei numeri" dovrebbe avere in mente un significato geometrico di retta e probabilmente intende che i punti della retta possono essere messi in corrispondenza con diversi insiemi

numerici: si parte tracciando una retta e suddividendola in tacche equidistanti che si fanno corrispondere ai numeri naturali e progressivamente il suo uso viene esteso alla rappresentazione dei decimali e poi degli interi negativi. La distanza delle tacche dipende dall'unità di misura scelta e ogni numero rappresenta quindi una misura. Ma quando viene introdotta in prima elementare raramente si costruisce partendo da una situazione di misura perché vorrebbe dire parlare subito di numeri decimali. Si parte quindi da una situazione astratta che non esiste nella realtà.
Ricompare infine nei grafici cartesiani: i due assi X e Y non sono altro che due rette numeriche su ognuna delle quali viene rappresentata una grandezza, con la sua unità di misura, da mettere in relazione con un'altra grandezza, con la sua unità di misura, applicando una regola (funzioni).
Questo strumento in apparenza molto semplice può diventare molto insidioso se non si riconducono ad unità tutti i significati che essa veicola. Ragioniamo sugli insiemi numerici che si rappresentano su una retta.
Sappiamo che per contare bastano i numeri naturali N. Per fare dei bilanci occorrono i numeri positivi e negativi Z. Gli insiemi N e Z sono detti "insiemi **discreti**" perché all'interno del loro ordinamento ogni elemento ha un suo successivo.
Per misurare occorrono i numeri razionali Q cioè numeri rappresentabili con frazioni.
L'insieme Q è un "insieme **denso**" perché all'interno del suo ordinamento non è possibile stabilire qual è il successivo di un qualsiasi suo elemento.
Dire che Q è denso significa dire che sulla retta attorno ad ogni numero, ad esempio a 2, vanno ad addensarsi infiniti numeri, cosicché non è possibile stabilire qual è il numero razionale immediatamente successivo a 2, ma questo non significa ancora che con i numeri razionali si possa "ricoprire" tutta la retta. Q infatti è un insieme **denso** ma **non continuo**.
Per arrivare alla continuità occorre introdurre i numeri irrazionali, come "radice di 2", che vanno a riempire i "buchi". Quindi tra due numeri razionali distinti sono compresi infiniti numeri irrazionali.
Se prendiamo una retta orientata (dotata di un verso, quello indicato dalla freccia) e vi poniamo in un punto il numero 0 (origine della retta orientata), i numeri razionali li possiamo disporre sopra molto semplicemente come indicato in figura :



Non sempre è però possibile esprimere la misura di una grandezza come frazione di un'altra, vedi, per esempio, il lato di un quadrato e la sua diagonale, e allora, come ho detto prima si dovrà introdurre un nuovo insieme di numeri che oltre ai razionali comprenda anche numeri non rappresentabili mediante una frazione, i cosiddetti numeri irrazionali J.



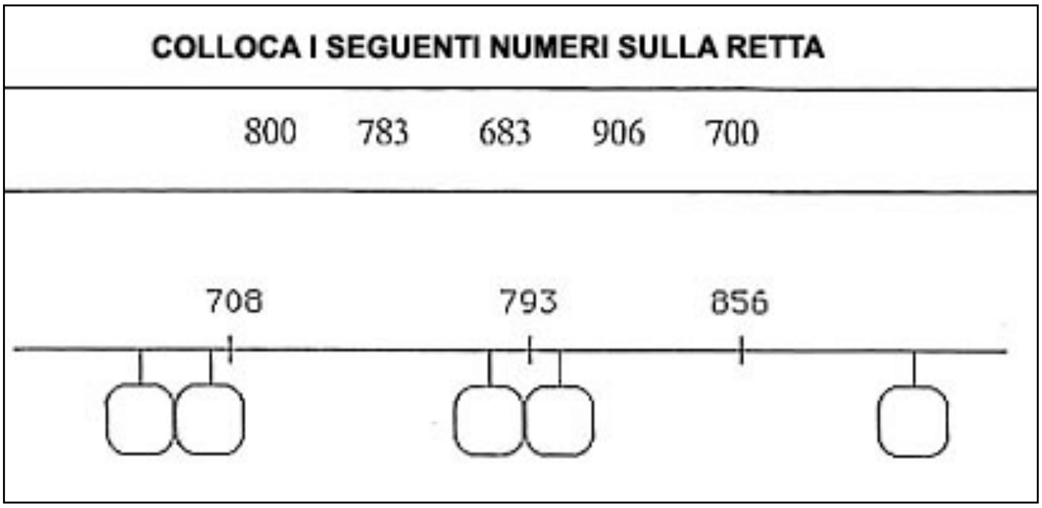
Solo l'insieme dei numeri reali R, formato dall'unione di numeri razionali Q (le frazioni che danno origine a numeri decimali finiti o periodici) e irrazionali J (es. radice quadrata di 2, numeri decimali non periodici es. pi greco), è un "insieme **continuo**".

Se prendiamo la retta possiamo stabilire una corrispondenza biunivoca fra i suoi punti e i numeri reali, per cui ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta e viceversa. La retta dei numeri è quindi la rappresentazione grafica dei numeri reali.

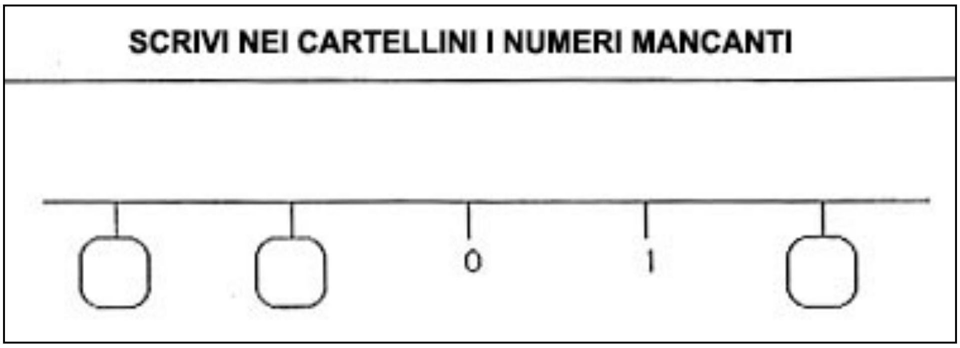
La retta dei numeri come strumento didattico

Nel nostro gruppo di ricerca la riflessione sulla retta è iniziata molti anni fa durante una sperimentazione sulla valutazione in Matematica e la preparazione di prove standardizzate a cui sottoporre un campione di alunni facenti parte delle scuole sperimentatrici.

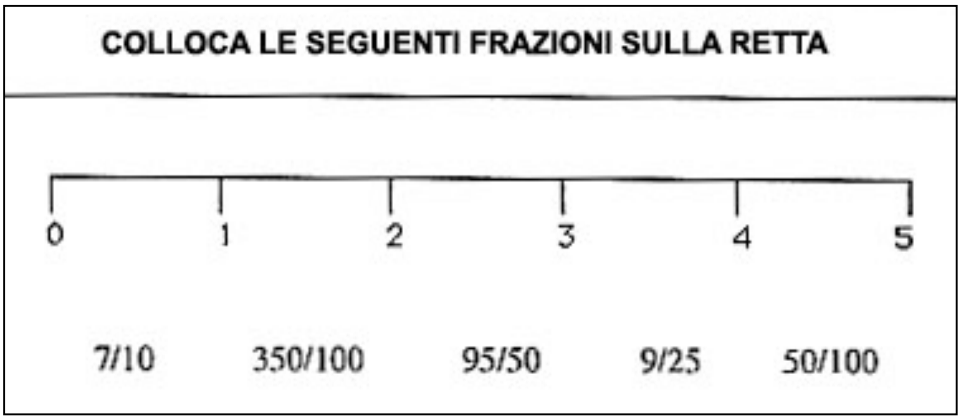
Fra i quesiti che alcuni insegnanti avevano preparato per testare le competenze in Matematica c'erano ad esempio questi:



NUMERI NATURALI



NUMERI NEGATIVI



FRAZIONI

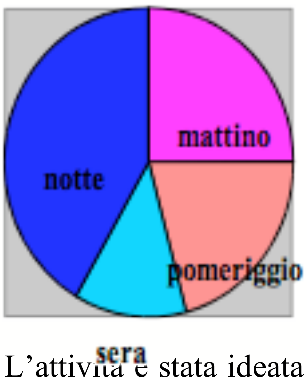
La frequenza degli errori nel rispondere a questi quesiti era stata da noi attribuita (se ricordo bene) a due cause:

- la retta dei numeri era scarsamente utilizzata, al di fuori delle nostre classi, nella didattica comune; veniva usata praticamente solo in prima per veicolare un modello discreto dei numeri, i numeri naturali (salti sulla linea dei numeri per contare e fare addizioni e sottrazioni);
- la considerazione della retta non come sapere matematico in sé ma solo come strumento didattico.

Dimenticata la retta … i numeri decimali venivano di solito introdotti partendo dalle frazioni e quindi si ragionava su parti di unità e raramente sui numeri razionali nella loro interezza, le frazioni improprie o apparenti venivano presentate solo con intento classificatorio, ma al di fuori del loro significato in quanto numeri. Quindi non veniva affrontato il problema dei numeri razionali che **non** hanno un precedente e un successivo cioè la densità della retta.
Sappiamo che il modello dei naturali è molto forte perché legato alle pratiche del contare e sovente diventa un ostacolo per la comprensione dei numeri decimali. L'uso della retta può aiutare ad integrare i due mondi offrendo dei *pivot cognitivi* che supportano il ragionamento nelle situazioni in cui si devono fare i conti con questi ostacoli.
Riesaminando alla luce di queste riflessioni il nostro curriculum di matematica ci eravamo quindi accorti che mancava un momento in classe prima in cui la retta facesse la sua comparsa per rappresentare una grandezza continua in un contesto familiare agli allievi.
In quel periodo stavamo lavorando sul tempo nei suoi vari aspetti: il tempo reale vissuto dagli allievi nella giornata scolastica, quello rappresentato nel calendario murale, il tempo ritmato dalle filastrocche … e anche il tempo nelle fiabe. E proprio una fiaba ha fornito l'occasione di introdurre una retta in cui anche gli spazi tra un numero naturale e l'altro assumevano un significato, pur non ospitando ancora altri tipi di numeri.

La retta dei numeri per rappresentare grandezze continue
La retta dei numeri nasce come modello di un insieme discreto, quello dei numeri naturali, ma nelle varie classi cresce, si modifica, diventa sempre "più densa".
Il primo modello viene introdotto in classe prima nel contesto delle misura del tempo con la situazione intitolata "Il tempo delle fiabe[1]
Il tempo è una grandezza continua perché è divisibile in parti a loro volta ancora divisibili in parti più piccole e questo processo non ha mai fine.
La situazione di partenza per questa attività è una specie di intervista collettiva stimolata dalle seguenti domande: *Cos'è il tempo? Cosa significa questa parola? Chi ha inventato il tempo? Cosa succede al tempo se l'orologio si ferma? Cosa riesci a fare in un'ora? Cosa riesci a fare in un minuto?*
E così via…

Questa messa in comune delle idee iniziali è servita all'insegnante come accertamento delle conoscenze degli alunni per calibrare gli interventi successivi. Il mese di settembre è stato dedicato ad attrezzare la "parete del tempo" con il calendario; la ruota della settimana; la ruota dei mesi; l'orologio; il "mesario" su cui venivano segnate le presenze e le condizioni del tempo meteorologico. Successivamente si sono affrontate attività finalizzate alla conoscenza della "giornata" facendo riflettere gli alunni sul succedersi ciclico delle giornate, sull'alternanza tra luce e buio e sulla sequenza mattino, pomeriggio, sera e notte.

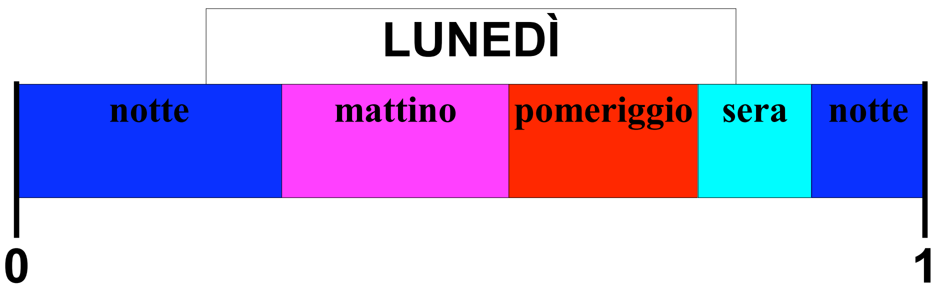


[1] L'attività è stata ideata da Attilia Cometto, è descritta sinteticamente su Matematica 2001 con il titolo "Il tempo delle fiabe"; è documentata in modo più esteso su http://gold.indire.it/ con il titolo "La misura del tempo"

La ciclicità di questi eventi è stata rappresentata con la "ruota della giornata": un cerchio suddiviso in 4 settori di ampiezza diversa, relativi a mattina, pomeriggio, sera, notte, contraddistinti con 4 colori diversi. Verso gennaio-febbraio è cominciata l'attività che ci interessa con l'obiettivo di costruire una linea del tempo che, pur rimanendo ancora fortemente contestualizzata, fosse anche la prima rappresentazione della retta dei numeri naturali da 0 a 7. Questo modello di retta dei numeri rappresenta una grandezza continua (tempo), ma i giorni vengono conteggiati come grandezze discrete.
L'attività ha inizio con la lettura del testo (modificato) della storia "I 3 porcellini" che si sviluppa nell'arco della settimana (dal lunedì alla domenica). Nel testo sono stati inseriti appositamente alcuni riferimenti temporali.
Dopo la lettura collettiva i bambini vengono invitati a riflettere sui *tempi* della fiaba:

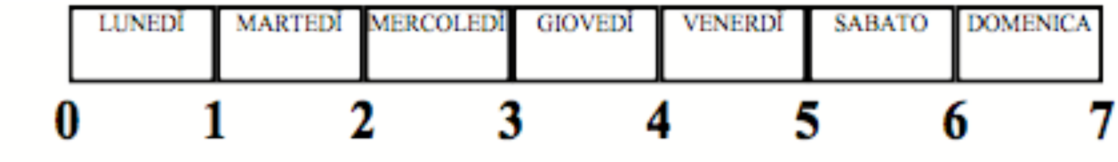
- *Quanto dura secondo voi questa fiaba?*
- *Quanto tempo passa da quando la mamma allontana i porcellini da casa, a quando si ritrovano tutti per fare la festa?*
- *Quanto tempo ci mette il primo porcellino a costruire la casa di paglia?*

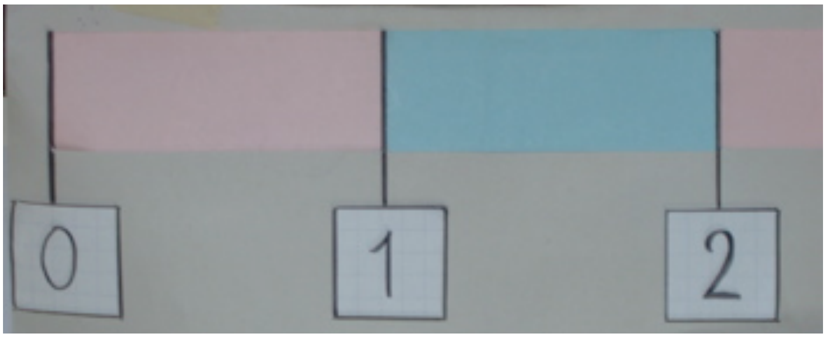
E così via…
In un altro incontro l'insegnante apre una discussione sulla durata e sulla misura della giornata: *"Le giornate durano tutte lo stesso tempo, oppure ci sono giornate più lunghe e giornate più brevi? Quale strumento usiamo per contare quanto è lunga una giornata?"*
Facendo anche riferimento alle ruote dei mesi e della settimana, si è osservato che in un giorno intero la lancetta delle ore fa esattamente 2 giri completi dell'orologio, corrispondenti a 24 ore.
Per rendere esplicito quanto avveniva allo scadere di un giorno si è utilizzato un orologio digitale in cui si vedeva bene il passaggio da 23:59 a 0 alla fine del giorno. Sulla ruota della giornata è stato quindi aggiunto un nastro colorato in corrispondenza delle ore 24.
Per realizzare le strisce relative ad ogni giornata, la ruota della giornata è stata posizionata all'inizio di una striscia di carta in corrispondenza del nastro che indicava l'inizio del giorno. Facendo ruotare progressivamente la ruota, si segnavano sulla striscia di carta le tacche che individuavano l'inizio e la fine delle diverse parti della giornata: notte, mattina, pomeriggio, sera, notte, fino a ritornare al nastrino colorato.

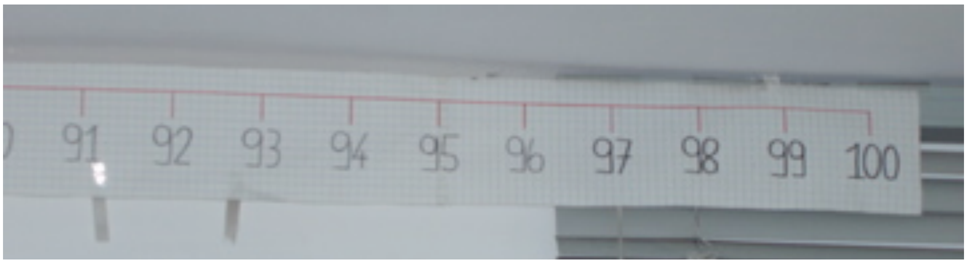


L'origine della striscia è indicata con uno 0, che rappresenta l'inizio del primo giorno della storia, cioè del lunedì. Il numero dei giorni non indica la data ma l'ordine in cui si susseguono i giorni e coincide con la "tacca" (immagine del nastrino colorato) posta tra un giorno e l'altro. Quindi: alla fine del lunedì è trascorso il primo giorno; alla fine del martedì è trascorso il secondo giorno; alla fine del mercoledì è trascorso il terzo giorno; ... alla fine della domenica è trascorso il settimo giorno.
Per accertarsi che tutti avessero compreso la rappresentazione l'insegnante faceva domande del tipo: *Dove c'è il numero 1 quanti giorni*

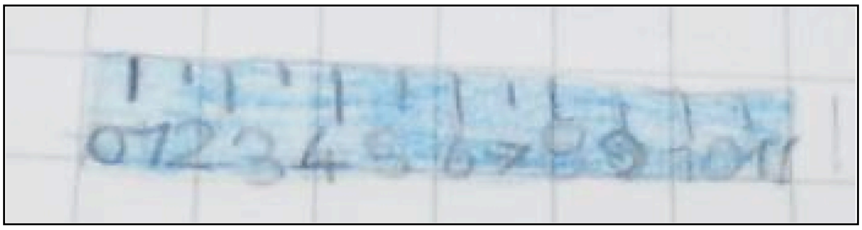
sono passati? Quanti ne restano per arrivare alla fine della settimana?
Sul quaderno la linea del tempo è stata poi riportata in formato ridotto e nei mesi successivi si è costruita la retta decontestualizzata da appendere sulle pareti della classe che arriverà gradatamente a 20, poi a 30… 100.







La retta incorporata negli oggetti di uso comune
In seconda, a volte anche in prima, gli allievi entrano in contatto con modelli di retta dei numeri che sono incorporati in oggetti di uso comune: uno di questi è il righello.



In questo disegno, fatto da un alunno di prima della classe di Rosa Santarelli, si vede bene come la sincronizzazione tra numeri e tacche debba provenire da una costruzione concettuale: anche se il righello è fra le sue mani il bambino disegna quello che sa, la sequenza dei numeri, e quello che percepisce, le tacche più lunghe e più corte. Solo con l'intervento intenzionale dell'insegnante e con la pratica della misura i numeri andranno al loro posto.

Un altro esempio di retta incorporata in un oggetto è quella che gli allievi vedono sul termometro quando imparano a leggere i gradi. Questa è una retta graduata con numeri positivi e negativi che permette di comprendere il ruolo dello zero come confine tra un insieme numerico e l'altro che ne è la copia speculare. Quando la retta con i numeri negativi e positivi verrà riportata sul muro e diventerà un oggetto di studio, finalmente si infrangerà il tabù della sottrazione che "non si può fare": se opero con tutti i numeri interi, nell'insieme Z mi è permesso di togliere da 3 un numero maggiore di 3 e sapere che … arrivo da qualche parte.

Operando con il termometro e con i gradi abbiamo di nuovo a che fare con una grandezza continua: la continuità qui si può percepire molto bene osservando salire e scendere il liquido colorato nel tubicino senza interruzione. Ma: *quando comincia e quando finisce un grado?* È la stessa domanda che ci si poneva nella storia dei tre porcellini a proposito del giorno. E anche qui bisogna fare attenzione a leggere i numeri sulle tacche e a contare gli spazi se vogliamo scoprire di quanti gradi è aumentata o diminuita una temperatura durante la giornata.

"Classe Prima. Nel calcolare sui termometri di carta la differenza fra la temperatura esterna (25°) e quella interna (20°) rilevate in precedenza, i bambini pervengono a tre risultati differenti: 4°, 5°, 6°. Il confronto evidenzia la natura – e gli ostacoli - del conteggio effettuato sulla scala graduata, legato da un lato al significato di grado come "spazio" dell'intervallo compreso fra due lineette successive e dall'altro al significato delle lineette come elementi che discretizzano una misura continua.[2]"

Per aiutare la concettualizzazione si possono organizzare riscaldamenti e raffreddamenti, lenti dal vero e poi simulati su modelli, per poter osservare in tempo reale questo movimento del liquido e aspettare a dire 1, 2, 3 a mano a mano che le tacche vengono raggiunte.
Anche in questo caso però sorgerà spontanea la domanda: e se non arriva fino alla tacca successiva, come faccio a dire quanti gradi sono? L'introduzione, in classe terza, di termometri digitali offre qualche risposta e un'altra occasione di parlare di numeri decimali.

Dalla retta al grafico cartesiano
Le attività di misurazione della temperatura offrono anche la possibilità di avviare alla costruzione di grafici cartesiani in un contesto in cui il significato dei due assi è determinato dall'oggetto e dal trascorrere del tempo tra una segnatura e l'altra.
Si comincia colorando file di termometri[3], uno per giorno della settimana, le colonnine del termometro diventano colonnine di un grafico e successivamente solo più dei punti. Per capire l'andamento della temperatura cioè studiarne le variazioni nel tempo in un primo momento si uniscono con una linea le sommità delle colonnine colorate e poi si uniscono i punti.
Questo è un passaggio molto delicato perché occorre legare questo tratto di linea al suo significato matematico, al fatto che la temperatura cambia continuamente e quindi i punti che si segnano corrispondono alle tacche del tempo perchè sono valori misurati in un momento preciso, mentre quelli che stanno sulla linea sono frutto di un'interpolazione, la rettilineità è una semplificazione perchè in realtà dovrei immaginare una linea molto seghettata, se potessi misurare la temperatura in ogni istante.
Per far comprendere questo passaggio io facevo misurare ai miei allievi la temperatura ogni ora durante al giornata e poi dovevano confrontare la linea retta che univa i punti iniziale e finale con quella seghettata che si otteneva dalle rilevazioni più ravvicinate. L'esperienza rinforzava e stimolava gli esperimenti mentali, il grafico veniva immaginato finchè qualcuno diceva: "Per avere il grafico preciso bisognerebbe misurare "continuamente" la temperatura".

Un'altra attività che conduce alla realizzazione di grafici di questo tipo è quella dell'osservazione della crescita di una piantina. Ogni giorno la piantina viene misurata usando una striscia di carta quadrettata e su una linea del tempo viene riportato sia il disegno della piantina sia la striscia che ne indica l'altezza (il disegno deve avere le dimensioni reali). Osservando il grafico che si forma giorno per giorno viene

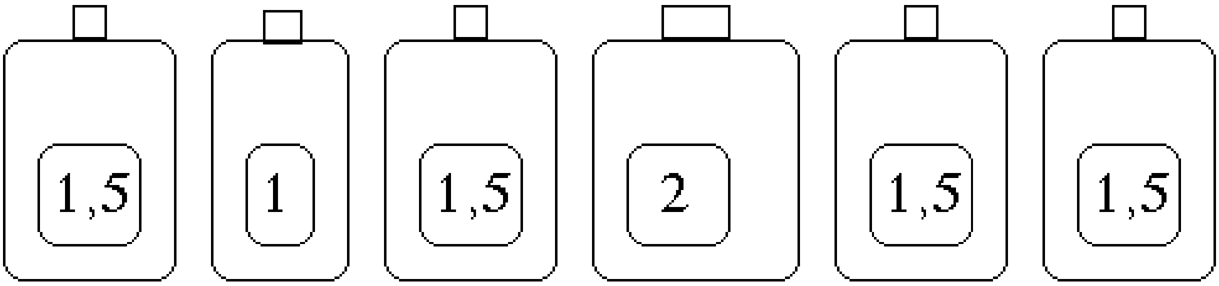
---

[2] Ezio Scali, N.R.D. Genova Scuola dell'Obbligo, Scuola Elementare di Piossasco (TO) - Il ruolo dell'argomentazione nell'emergenza e nella padronanza consapevole dei concetti - 4° internuclei scuola dell'obbligo - aprile 2001
[3] queste attività sono state riprese da quelle descritte dal gruppo di ricerca che fa capo al Prof. Paolo Boero documentate nel Rapporto tecnico "Bambini maestri e realtà" e in parte inserito in Matematica 2001 "Il significato di grado sul termometro" pag. 284

spontaneo chiedersi: che cosa è successo mentre eravamo a casa sabato e domenica? È cresciuta o si è abbassata? sarà cresciuta tutta insieme o un pezzettino per volta? Si tratta anche in questo caso di fare un'interpolazione perchè la crescita avviene continuamente ma io la misuro solo a intervalli di tempi prestabiliti. Anche in questo caso c'è un processo di discretizzazione e nella rappresentazione con un disegno o con un grafico a colonne realizzato mettendo in fila le strisce di carta quadrettata con cui si è misurata la piantina si deve cercare una strategia per disegnare l'altezza delle piantine il sabato e la domenica.
Le diverse altezze riportate sull'asse verticale permettono di individuare anche le tacche intermedie tra le unità e quindi l'esigenza di sotto-graduare la retta almeno con i "mezzi".

Il passaggio ai numeri decimali
Le situazioni come quella della piantina o del termometro e altre come quelle della misurazione delle altezze degli alunni conducono necessariamente alla costruzione di rette graduate con i numeri decimali. Ma come far capire la scrittura dei numeri decimali? Nella situazione che presento ora il problema della scrittura viene affrontato contemporaneamente a quello della costruzione del suo significato con un percorso un po' diverso dal solito perché invece di partire dalle frazioni decimali e dare la scrittura dei decimali con la virgola dopo, si parte dalla scrittura del numero decimale per arrivare a ri-costruirne a posteriori il significato.

Una festa di compleanno è una situazione che si verifica spesso sia a scuola che fuori dalla scuola e quindi fa parte dell'esperienza dei bambini. La soluzione di questo problema sarebbe banale se si trattasse solo di bottiglie da 1 o 2 litri, la presenza delle bottiglie da 1,5 l pone invece qualche problema perché finora gli alunni sono stati abituati a contare usando solo il registro dei numeri naturali, qui devono controllare un doppio registro, quello dei naturali e quello dei decimali. Per poter contare devono elaborare o meglio rendere esplicita la loro "teoria" sui numeri decimali (numeri con la virgola).
Cominciamo dal testo del problema:
"*Pochi giorni fa, in classe, abbiamo festeggiato un compleanno. Abbiamo portato dei dolci e delle bevande. Poi abbiamo riordinato la classe e raccolto le bottiglie vuote, che sono state risposte in questa borsa. Ho pensato di non buttarle, ma di proporvi un problema, utilizzando proprio queste bottiglie*."



L'insegnante pone su un tavolo le bottiglie: una da un litro, quattro da un litro e mezzo e una da due litri. Quindi pone la domanda: *Quanti litri di bevande abbiamo bevuto durante la festa di compleanno?*
Che cosa hanno di speciale queste bottiglie? Oltre ad avere contenuti diversi, sull'etichetta compare la scrittura 1,5 l, cioè il numero decimale. Proprio l'esistenza di questo "segno" farà sì che gli alunni elaborino delle congetture su come si può fare per addizionare numeri con e senza virgola e, per farlo, dovranno dare un senso a quella scrittura 1,5 che probabilmente per la prima volta entra intenzionalmente a far parte del vissuto scolastico, pur essendo già nota nel contesto extrascolastico. Dopo un primo momento di condivisione delle idee perché la consegna venga compresa da tutti (si può chiedere: In ogni bottiglia quanti litri ci sono?) può partire il processo di risoluzione a coppie o in piccoli gruppi durante il quale gli alunni produrranno dei testi scritti per spiegare come hanno ragionato per trovare il totale dei litri.

Ecco alcuni testi prodotti dagli alunni[4]:

> Lorenzo ha scritto: Ci sono quattro bottiglie da un litro 1,5 1 da 2 litri e una da 1 litro. Prima ho messo tutti i mezzi e mi è uscito 2 litri poi ho messo i due litri insieme al litro 1 e mi è uscito 5 con quello di prima poi ho messo gli altri 4 litri quindi 4 + 5 = 9 quindi la mia risposta è 9.
>
> Claudia ha scritto: Io ho contato così: ho messo 2 bottiglie da un litro e mezzo insieme, e mi è venuto fuori un litro, poi ne ho messe altre 2 e mi è venuto fuori un litro, che con quello di prima fa due litri. Poi c'era quella da un litro, che insieme a quelli di prima fanno 3 litri. E più quella da due litri fa 5, ed è appunto il 5 il mio risultato.

Ed ora due brevi passaggi della discussione di bilancio quando Lorenzo e Claudia entrano in conflitto:

> Ins.: 4 bottiglie da 1 litro e mezzo, quanto fanno?
> Claudia: Fanno 2 litri, perché mezzo litro più mezzo litro fa 1 litro, e le bottiglie da mezzo litro sono 4.
> Ins.: Siete d'accordo?
> Voci: No!
> Lorenzo: Secondo me sono 6, perché sono 4 i litri delle bottiglie e poi però ci sono gli altri mezzi, un mezzo più un mezzo fa 1 litro, gli altri 2 uguale, e ci sono questi 4 litri messi da parte, 4 più 2 fa 6.

E per finire il testo collettivo che giunge dopo la negoziazione avvenuta con la discussione:

> "1 bottiglia da 2 litri
> 4 bottiglie da 1,5 litri
> 1 bottiglia da 1 litro.
> Prendo la bottiglia con 2 litri e la bottiglia con 1 litro. Insieme fanno 3 litri.
> Dalle 4 bottiglie di 1,5 litri prendo i 4 litri e li aggiungo ai 3 litri e fanno 7 litri.
> Adesso prendo i 4 mezzi litri, li metto insieme: fanno 2 litri.
> I 7 litri di prima più 2 litri fanno in tutto 9 litri.
> 2 litri + 1 litro = 3 litri
> 3 litri + 4 litri = 7 litri
> 0,5 litri + 0,5 litri = 1 litro
> 0,5 litri + 0,5 litri = 1 litro
> 1 litro + 1 litro + 7 litri = 9 litri
> Jessica e i suoi amici hanno bevuto 9 litri di bevande."

Questa situazione è il punto di partenza di una serie di altri problemi correlati che aiutano a mettere sempre meglio a fuoco i significati dei numeri decimali in generale e conducono anche alla loro collocazione sulla retta.
La bottiglia da mezzo litro si riempie con 2 bicchieri e mezzo, segnando il livello dell'acqua rimasta nel terzo bicchiere si trova 0.1 l, con questo si può contare per 0,1 e riempire un bottiglione da 2 litri o un recipiente di vetro anche di 4 o 5 litri segnando ogni volta il livello. Se si attacca una striscia di nastro adesivo di carta sulla bottiglia si costruisce una "linea dei litri" che è un modello di retta dei numeri con i decimali… che si può staccare dalla bottiglia, porre in orizzontale e poi ingrandire per appenderla al muro.

Un altro modello di retta dei numeri viene realizzato a partire da una situazione-problema che fa uso di listelli di compensato o cartoncino larghi 5 cm ma di lunghezze diverse: pezzi lunghi un metro, pezzi lunghi 50 cm, pezzi lunghi 10 cm.
Inoltre l'insegnante dovrà preparare:

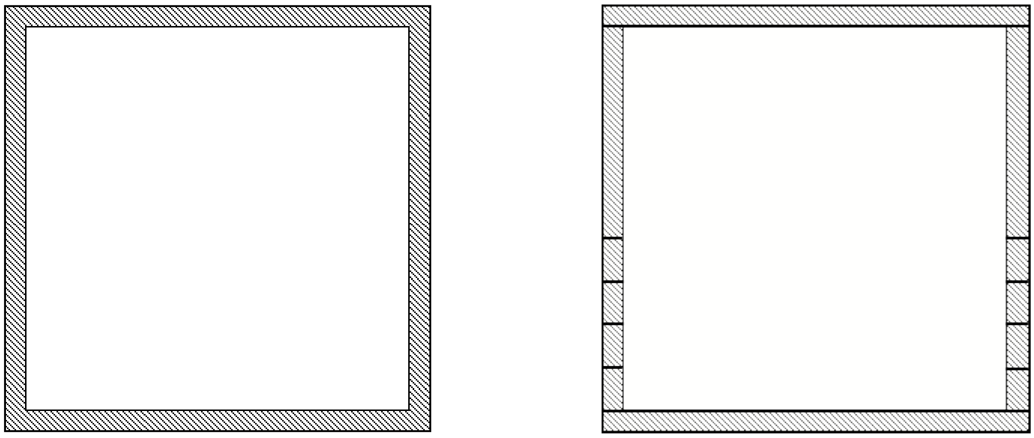
- una retta dei numeri in cartoncino da mettere sul pavimento con i numeri da 0 a 4, lunga 4 m (un metro fra ogni unità) e alta almeno 5 cm.
- il disegno del telaio di una finestra quadrata con il lato di 1 m (il telaio è spesso come i listelli 5 cm – vedi disegni sottostanti)

I listelli rappresentano unità, mezzi e decimi ma non si usa subito questo nome con gli alunni, a ciascuno viene attribuito un nome provvisorio ad es. pezzo lungo, pezzo medio, pezzo corto.
L'insegnante apre sul pavimento il foglio con disegnata la finestra e legge la consegna:
"Con questi pezzi un falegname deve costruire il telaio di questa finestra quadrata utilizzandone il minor numero possibile e senza sovrapporli per non sprecare legno. Quali pezzi occorrono? Fate le previsioni.

---

[4] L'attività a cui si fa riferimento è stata svolta nella classe terza di una scuola di Torino da un'insegnante del gruppo di ricerca (M. Gilardi)

Gli alunni sono disposti in cerchio e in mezzo all'aula, sul pavimento, ci sono i pezzi; a turno, si avvicendano e provano a confrontare tra loro i pezzi, mentre gli altri possono guardare cosa fanno i compagni. Il disegno della finestra è lì accanto ma in questo primo momento gli alunni non possono sovrapporre i pezzi, devono solo porli in relazione tra loro. Gli alunni vengono invitati a fare le loro previsioni, prima oralmente, poi individualmente su di un foglio.
Qualcuno si disegna lo schizzo della finestra individuando dove metterebbe i vari pezzi.



La soluzione che in genere viene data per prima è: 4 pezzi lunghi. Qualcuno pensando di fare meglio dice 2 lunghi e 4 medi. Difficilmente in prima istanza vengono indicati i pezzi piccoli.
La verifica e la discussione che segue mettono a fuoco il problema delle sovrapposizioni e si arriva alla formulazione corretta: 2 pezzi lunghi, 2 pezzi medi e 8 pezzi corti.
Ma il lavoro non è finito: "*Il falegname ha bisogno di ordinare alla segheria il legno che occorre per costruire il telaio di questa finestra. Vogliamo scoprire quanto legno occorre sapendo che l'unità di misura per il falegname è il pezzo lungo che ora perciò chiameremo pezzo unità?*"

L'insegnante mette per terra la striscia con disegnata la retta dei numeri fino 4.[5]
Un alunno inizia a mettere sulla retta tutti i pezzi via via utilizzati per costruire il telaio della finestra incominciando dai pezzi lunghi.
Ogni volta, prima di mettere i pezzi, fa congetturare agli alunni dove arriverà sulla retta.
Si arriva prima a uno, poi a due. Dovendo poi mettere i pezzi medi tutti sono d'accordo nel chiamarli "mezzi" e dicono anche che corrispondono ognuno al numero 0.5.
Quindi mettendo il primo mezzo si arriva a 2 e mezzo (un bambino dice che si scrive 2.5) e mettendo il secondo mezzo si arriva a tre. A questo punto rimangono da mettere 8 pezzi corti.
L'insegnante chiede: *come potremmo chiamare uno di quei pezzettini*? Qualche bambino dice un quarto.
Micol invece dice che potremmo chiamarlo un decimo e spiega che su un lungo ci stanno 10 pezzi corti. Tutti ritengono valido quanto è stato detto da Micol.
L'insegnante chiede dove si arriverebbe mettendo un pezzo corto sulla retta e Stefano dice che secondo lui si arriva a 3 e un decimo che si scrive 3.10. Altri invece dicono che si scrive 3.1. Questo sarà oggetto di altre discussioni.
A questo punto sulla retta dei numeri dove erano già stati riportati i mezzi vengono anche costruiti i decimi e viene istituzionalizzata la scoperta fatta, cioè che:
Un decimo si scrive 0.1 e si ottiene facendo 1 : 10 perchè è la decima parte di uno oppure facendo 0.5 : 5 perchè è la quinta parte di mezzo.
Successivamente si gioca solo più con con i pezzi e la linea: *Prendi 2 lunghi, 1 medio e 3 corti, dove arriverai sulla linea?*

È molto probabile che in qualche situazione il modello degli interi vada a interferire con quello dei decimali come si vede in questo estratto da un discussione:

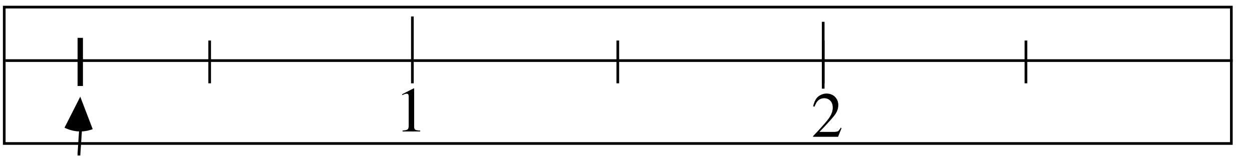
Ins: C'é qualcuno che vuole provare a spiegare perché fare dieci volte 0.1 fa 1?
Andrea: - Perché ogni volta che arrivi a 9 poi arrivi a 10
Irene: - Perché noi abbiamo sempre fatto: 9+1 fa 10
Stefano F. : Sono messi al contrario !
Stefano S: - Io avevo calcolato che 0.19 + 0.1 faceva 0.29 sulla calcolatrice.
Ins: Che strani questi numeri! Prima qualcuno aveva detto che 0.19 + 0.1 faceva 20 perché 19 + 1 fa 20, ma ora Stefano ha verificato che fa 0.29
Davide: - Cambia il risultato forse perché c'è lo zero virgola.
Francesca G.: - Io volevo dire più o meno quello che ha detto Davide ma con una differenza. Noi siamo abituati a lavorare con i numeri senza lo zero virgola e non abbiamo ancora fatto l'abitudine a lavorare con questi numeri.

[5] Attività svolta da M. Bonadio Scuola Primaria Collodi Pinerolo

Voglio provare a spiegare perché non fa 0.10: quei numeri sono più piccoli dell'uno, noi eravamo abituati a considerare l'uno un numero molto piccolo, ma esistono numeri più piccoli dell'uno, i decimi e visto che sono più piccoli il loro dieci vale 1, il 10 di decimi vale 1.
Ins: Vuoi dire che se hai dieci decimi hai uno?
Francesca G.: - Visto che 0.1 è più piccolo di uno, vuol dire che dallo zero aggiungiamo una parte piccola che è più piccola di uno, che è la decima parte di uno.

La retta come contesto per porre e risolvere problemi
La retta dei numeri a cominciare dalla classe seconda viene sovente costruita dagli allievi per rappresentare numeri naturali a diverse scale: la retta per 1, per 10, per 100, per 1000 con le tacche intermedie a 5, 50, 500 e poi ancora a 25 a 250 ecc. Le caratteristiche che deve avere una retta dei numeri vengono piano piano codificate: deve avere le tacche alla stessa distanza, i numeri si scrivono sulle tacche, si conta da una tacca all'altra. Il dito che percorre lo spazio tra una tacca e l'altra per contare si contrappone al dito che salta da una tacca all'altra per sottolineare che lì in mezzo c'è sempre qualcosa, anche se non è scritto può essere pensato, immaginato, ricostruito in qualsiasi momento. Anche il suono della voce aiuta nel ricostruire questa "continuità" nel passaggio tra un numero su una tacca e il successivo: si parte dall'1 e si va al 2 facendo terminare l'ultima lettera della parola due sulla tacca, è di nuovo un gioco di sincronismi come nei primi conteggi di collezioni ma in questo caso è un sincronismo che deve essere costruito concettualmente con gli allievi facendo dire al gesto ciò che le parole non possono esplicitare.
Nel corso degli anni la retta diventa quindi un modello di riferimento per ragionare sui numeri finché viene interiorizzata insieme ai gesti che sono stati utilizzati per usarla e diventa un oggetto con cui si possono fare degli esperimenti mentali.
Quando la retta fa parte da tanto tempo del contesto didattico diventa essa stessa un contesto nel quale porre e risolvere problemi come nel caso del problema delle *strisce di carta* che è stato risolto utilizzando una strategia suggerita da Arsac[6].

La classe, una terza, è stata suddivisa in quattro gruppi di 4/5 bambini ciascuno che hanno lavorato a due a due in momenti diversi. Ogni gruppo ha ricevuto una striscia di carta con una tacca rossa su una retta:



tacca rossa

I due gruppi avevano le tacche in posti diversi, uno in corrispondenza del numero 0,2 e l'altro del numero 0,8, anche la lunghezza della striscia e la distanza delle tacche era diversa per i due gruppi.
Ogni gruppo doveva individuare il numero segnato con la tacca rossa.
Tutti i gruppi giungono alla soluzione, le discussioni nei gruppi sono molto animate. Data la soluzione, il compito del gruppo non è però concluso, si deve produrre un testo scritto per comunicare all'altro gruppo dove si trova il numero appena scoperto, tenendo presente che l'altro gruppo non ha la striscia della stessa lunghezza. I bambini non comunicano il numero trovato nei loro testi per cui l'altro gruppo in pratica deve indovinarlo, dopo aver tracciato la tacca nel punto indicato.
Ecco la trascrizione dei protocolli dei gruppi:

	consegna1: Qual è e come si scrive il numero che occupa il posto segnato dalla tacca rossa? Spiegate come avete fatto a scoprirlo.	consegna2: Comunicate ai compagni del gruppo …. il numero che avete scoperto e come devono fare per segnarlo sulla loro striscia al posto giusto (la loro striscia non è lunga come la vostra)
gruppo A1	Da 0,0 a 1 ci sono 20 cm. Abbiamo saltato 2 cm fino arrivare alla linea rossa e ci è venuto 0,8	Luana dice di fare 10 parti uguali poi riiniziare da capo e contare 8 parti così potrete fare la tacca rossa e scrivere il numero. Elisa dice che: fai 8 tacche e scopri il numero segreto.

[6] G. Arsac, G. Germaine, M. Mante "Problème ouvert e situation-problème" Institut de recherche pour l'einsegnament des mathematiques, Academie de Lyon, 1988

gruppo A2	Abbiamo misurato con il righello e da 0 a 1 ci sono 20 cm poi Lorenzo ha scoperto grazie al righello che ogni 2 cm c'è un numero; lasciando il righello da 0 a 1 abbiamo visto e scoperto altri numeri che sono 1,5 e 2. Il numero che abbiamo scoperto è 0,8, l'abbiamo scoperto con il righello misurando ogni 2 cm.	Si misura da 0 a 1, si fa la metà e la metà è 0,5, da 0,5 a 1 ci devono essere 5 spazietti uguali poi da 0,5 si contano 3 spazietti e si scopre il numero.
gruppo B1	Tra 0 e 1 la metà è 0,5. All'inizio della riga c'è 0 e da 0 alla tacca rossa c'è 6 cm di spazio. La metà è 3. Abbiamo contato 3 cm ed era 0,1, abbiamo di nuovo saltato altri 3 cm e c'era la tacca rossa, e abbiamo scoperto 0,2	Bisogna fare 10 parti uguali da 0 a 1. Poi contate dallo 0 due parti uguali e fate la tacca rossa, e scoprite che numero è.
gruppo B2	Noi abbiamo messo il righello da 0 a 1 ed erano 30 cm. Dopo abbiamo diviso il 30 in 2 parti uguali. Abbiamo scoperto col righello che da 0 a 0,1 abbiamo scoperto che era 3 cm. Allora abbiamo provato sempre per tre centimetri ed era giusto però noi siamo andati a tentativi ed era 0,2	Dovete fare così: prendere il righello e misurare da 0 a 1, poi dovete fare la metà che è 0,5 da 0,5 bisogna dividere 5 parti uguali. Dopo 2 parti uguali c'è la tacca rossa.

Come si può notare le strategie proposte sono molto diverse: il testo è il frutto della negoziazione avvenuta nel gruppo durante tutta la conduzione dell'esperienza. Tutti i gruppi però hanno dovuto definire una procedura per ottenere la suddivisione della striscia in parti uguali partendo da misure diverse. Era la prima volta che veniva proposto un problema di questo tipo, fino a quel momento la suddivisione della "retta numerica" avveniva automaticamente, o versando bottiglie da un litro e/o mezzo litro e segnando con una tacca il livello (SIPRO delle bottiglie da un litro e mezzo) o giustapponendo listelli di legno (SIPRO dei telai delle finestre).

In quarta un altro problema interessante da porre è il seguente:
Immagina nella tua mente una retta numerica con i numeri decimali. Qual è il numero più vicino a =,7 tra i seguenti numeri: 8 – 0,3 – 1. Spiega perché.
In questo caso la retta è solo più immaginata perché è ormai diventata un modello mentale.
Un bambino (Roberto) risponde che il numero è 8, 3 bambini dicono che è 0,3 e tutti gli altri dicono che è 1, poi nella discussione di bilancio esplicitano i loro ragionamenti:

> Katia: Io ho scelto l'uno perché ho contato quanti decimi passavano da 0,7 a 1 e da 0,3 a 0,7 e siccome da 0,7 a 1 sono passati solo 3 decimi mentre da 0,3 e da 8 ne passavano di più ho scelto l'uno
> Luana: Io invece ho contato da 0,7 a 8 c'era 73 decimi, perciò non era quello, poi da 0,3 a 0,7 ho contato 4 decimi e da 0,7 a 1 ho contato 3 decimi e così quello lì che aveva meno decimi era da 0,7 a 1

Più avanti nella discussione dopo aver ascoltato i compagni….

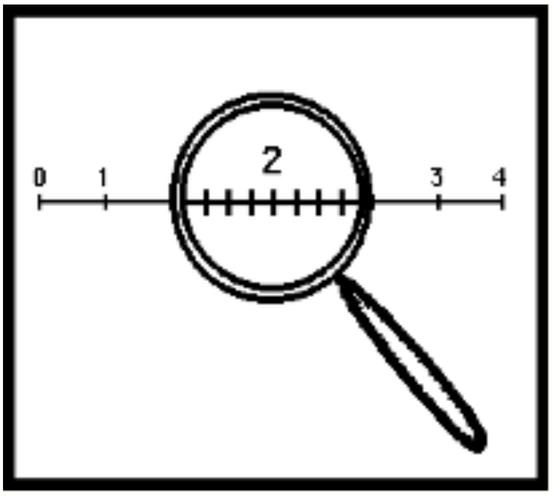
> Roberto: Perché per me non contava niente lo zero e pensavo che era 7, invece 0,7 è più vicino all'uno
> Andrea M.: Io volevo dire che Roberto è come se avesse cancellato lo zero allora ha fatto da 7 arrivare a 8 ce n'è solo 1, da 3 arrivare a 7 ce ne sono 4, invece da 1 arrivare a 7 ce ne sono 6, lui ha fatto questa cosa, neh Roberto?
> Ins: Però anche Francesca aveva tolto gli zeri ma ha dato una risposta corretta. Francesca ha detto: il numero più vicino è 1 perché prendiamo il 0,3, ci levi lo zero e pure al 0,7; da 3 a 7 ci vogliono 4 numeri …
> Enrico: Eh, già, è per contare meglio, lei! L'aveva già capito lei il problema, solo per la spiegazione che lei ha tolto gli zeri invece Roberto l'ha usato per fare il ragionamento

In questo esempio si vede come gli alunni abbiano ormai "immerso" i numeri interi nei decimali e il modello della retta sicuramente li ha aiutati in questo senso.

Per arrivare a comprendere la **densità** della retta abbiamo bisogno di una situazione-problema costruita ad hoc, quella del radar che avete sperimentato in laboratorio e qui riassumo brevemente.

"Bisogna trovare due frazioni che, sulla retta dei numeri, stiano una a destra e una a sinistra di una frazione scelta dall'insegnante (la frazione è 14/4): vince chi riesce a racchiuderla con il "fascio radar" più stretto; si gioca tutti insieme ma si possono formare dei piccoli gruppi per fare le giocate; si può usare la calcolatrice."

In questo caso ragionare sulla retta permette di capire che ciò che io posso pensare va molto al di là di ciò che io posso rappresentare, ma se io non mi aggancio ad un modello mentale come quello che mi fornisce la retta difficilmente posso immaginare cosa succede continuando a dividere le unità in parti sempre più piccole.



Anche nelle prime classi, quando ancora non si parla di decimali, gli allievi, costruendo rette con vari tipi di graduazione, per 10, per 100, per 1000, cominciano ad intravedere la possibilità di riempire gli spazi in mezzo tra le varie tacche segnate dai numeri interi e la domanda "*che cosa c'è in mezzo*?" posta ogni volta dall'insegnante diventa in momenti successivi uno stimolo per gli allievi per andare alla scoperta dei numeri misteriosi non scritti tra una tacca e l'altra fino ad arrivare alla retta con i decimali dove "in mezzo" tra 1 e 2 c'è 1,5 e tra 1 e 1,5 ci sono 1,1   1,2   1,3   e poi "in mezzo" tra 1,1 e 1,2 c'è 1,15 e così via.
Con l'introduzione dei numeri decimali e l'avvio di attività più specifiche nel contesto della misura gli allievi avranno la necessità di aumentare di volta in volta queste suddivisioni per passare ai centesimi, ai millesimi e immaginare che cosa succede continuando ancora oltre queste suddivisioni in parti sempre più piccole. In questo contesto diventa utile la metafora delle lente di ingrandimento che ti permette di ingrandire progressivamente gli spazi tra una tacca e l'altra per rappresentare parti che diventano sempre più piccole.